APRIL/MAY 2024

CMA62/BMA62 — REAL ANALYSIS II

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define complete metric space.

   முழு மெட்ரிக் வெளி-வரையறு.

2. Give some examples of complete metric space.

   முழு மெட்ரிக் வெளி-சில எடுத்துக்காட்டு தருக.

3. State the condition for a real valued function to attain its minimum value.

   ஒரு மெய் மதிப்பு சார்பு அதன் சிறுமம் அடைவதற்கான நிபந்தனையை கூறு.

4. List out some examples for connected subset of R^1.

   R^1 -ல் தொடர்சியான உட்கணங்களுக்கு சில உதாரணங்களை பட்டியலிடவும்.

5. Define $L[f, \tau]$.

   $L[f, \tau]$ வரையறு.

6. Compute $\lim_{n\to\infty} U[f,\sigma_n]$ for $\left\{0,\frac{1}{n},\ldots\frac{n}{n}\right\}$

$\left\{0,\frac{1}{n},\ldots\frac{n}{n}\right\}$ -க்கான $\lim_{n\to\infty} U[f,\sigma_n]$ கணக்கிடு.

7. Verify Rolle's theorem for $f(x)=x^2(0\le x\le 1)$.

$f(x)=x^2(0\le x\le 1)$ என்ற சார்பிற்கு ரோல் தேற்றத்தின் கொள்கையை சரிபார்.

8. State the law of mean.

சராசரி விதியைக் கூறு.

9. State Cauchy's criterion for uniform convergence.

சார்புகளின் ஒழுங்கு வரிசையின் சீரான ஒருங்குதலுக்கான கோசி திட்டமான அளவையைக் கூறு.

10. Show that $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}(0\le x<\infty)$ converge uniformly.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}(0\le x<\infty)$ -யை சீரான ஒருங்கும் வரிசை என நிரூபி.

17. Prove that if f is continuous from a compact metric space M_1 to M_2 then f is uniformly continuous on M_1.

f - M_1 என்கிற அடக்கமான மெட்ரிக் வெளியில் இருந்து M_2 -விற்கு செல்லும் ஒரு தொடர் சார்பு எனில் f ஒரு சீரான தொடர் என நிரூபி.

18. State and prove chain rule.

சங்கிலி விதியைக் கூறி நிரூபி.

19. State and prove Rolle's theorem.

ரோல்ஸ் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

20. Prove Dini's theorem.

டினி தேற்றத்தை நிரூபி.

———————

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Show that a closed subset of a complete metric space is complete.

ஒரு முழு மெட்ரிக் வெளியின் மூடிய உட்கணம் முழுமையானது என காட்டு.

Or

(b) Prove that $[0,1] \cup [2,3]$ is not connected.

$[0,1] \cup [2,3]$ இணைந்தது அல்ல என நிரூபி.

12. (a) If a metric space M has Heine borel property then show that it is compact.

M எனும் மெட்ரிக் வெளியில் ஹெய்ன்-போரல் பண்பு இருந்தால் அது அடக்கமானது என நிறுவுக.

Or

(b) If f is 1 –1 continuous function from a compact metric space M_1 on to M_2 then prove that f^{-1} is also continuous.

M_1 என்கிற அடக்கமான மெட்ரிக் வெளியில் இருந்து M_2 -விற்கு செல்லும் ஒரு 1–1 தொடர் f எனில், f^{-1} -ம் தொடர் என நிரூபி.

13. (a) If $E_1, E_2 \ldots$ of R^1 are of measure zero. Prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ is also of measure zero.

R^1 -ன் உட்கணமான $E_1, E_2 \ldots$ அனைத்தும் அளவை பூஜ்ஜியம் எனில் $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ -ம் அளவை பூஜ்ஜியம் என நிறுவுக.

Or

(b) Compute $g^1(c)$ for $g(x) = x^2 (-\infty < x < \infty)$.

$g(x) = x^2 (-\infty < x < \infty)$ எனில் $g^1(c)$ கணக்கிடுக.

14. (a) State and prove the second mean-value theorem for integrals.

தொகையத்திற்கான இரண்டாம் சராசரி - மதிப்பு தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

Or

(b) If $f^1(x) = 0 \forall x$ in closed bounded interval $[a,b]$ prove that f is constant.

மூடிய மற்றும் வரம்புறு இடைவெளியில் $f^1(x) = 0 \forall x$ எனில் f ஒரு மாறிலி என நிரூபி.

15. (a) If $fn(x) = \frac{x^n}{1+x^n} (0 \le x \le 1)$, show that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges point wise on $[0,1]$.

$fn(x) = \frac{x^n}{1+x^n} (0 \le x \le 1)$ எனில் $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $[0,1]$ல் புள்ளிவாரி ஒருங்கல் என காட்டு.

Or

(b) If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly, prove that $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ also converges uniformly.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ சீரான ஒருங்கல் எனில் $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ - யும் சீரான ஒருங்கல் என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Show that $A \subseteq R^1$ is connected $\Leftrightarrow$ whenever $a,b \in A$ with $a < b$ there exist $C \in A$ such that $a < c < b$.

$A \subseteq R^1$ தொடர்ச்சியானது $\Leftrightarrow$ $a,b \in A$ மற்றும் $a < b$ எனில் $a < c < b$ என அமையுமாறு $C \in A$ ஐ காண இயலும் என காண்பி.